ШИФР (не заполнять)
018052

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по МАТЕМАТИКЕ вариант I
(указать предмет)

Выполнил (а)

Фамилия:	С	А	П	Р	Ы	К	И	Н										
Имя:	А	Л	Е	К	С	Е	Й											
Отчество:	А	Л	Е	К	С	А	Н	Д	Р	О	В	И	Ч					

Класс: 11

Наименование школы: МАОУ "Гимназия города Юрги"

Город (село): Юрга

Область: Кемеровская

Площадка проведения : МАОУ "Гимназия города Юрги"

Сирота: нет *(указать да/нет)* Инвалид: нет *(указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)*

Дата рождения: 21 / 06 / 1999

Контактный телефон: 89964148514 / 89234853086

E-mail: 7alexsapr7@gmail.com.

vk.com/ alex_xs

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e – mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Сапр

ШИФР 018052

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~50~~	27б	Хмылёва Т.Е	

1. $f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x-13 & x-1 \\ \hline -\ x^2-x & x+4 \\ \hline -\ 4x-13 & \\ 4x-4 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

$f(x) = \frac{(x+4)(x-1)-9}{x-1} = x+4-\frac{9}{x-1}$

$f(x)$ принимает целое значение при $\left(x+4-\frac{9}{x-1}\right)$ - целом.

$x+4$ - всегда целое при любом $x \in Z$

$\frac{9}{x-1}$ принимает целое значение при $x = 10; 4; \pm 2; 0; -8$

$f(2) = \frac{4+6-13}{2-1} = -3$ $\quad f(-2) = \frac{4-6-13}{-2-1} = 5$ $\quad f(0) = \frac{0+0-13}{0-1} = 13$

$f(-8) = \frac{64-24-13}{-8-1} = -3$ $\quad f(4) = \frac{16+12-13}{4-1} = 5$ $\quad f(10) = \frac{100+30-13}{9} = 13$

$f(x)$ принимает наименьшее целое значение при $x = -8; 2$

Ответ: при $x=-8; x=2$

7б

шифр:

2. Т.к. парабола касается двух прямых, нужно рассмотреть совокупность двух систем.

$$\left[\begin{cases} y = ax^2 + bx + 1 \\ y = 2x + 10 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ax^2 + bx + 1 = 2x + 10 \\ ax^2 + (b-2)x - 9 = 0 \end{matrix} \Rightarrow D = (b-2)^2 + 9 \cdot 4a = 0\right.$$

$$\left[\begin{cases} y = ax^2 + bx + 1 \\ y = 2 - 2x \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ax^2 + bx + 1 = 2 - 2x \\ ax^2 + (b+2)x - 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow D = (b+2)^2 + 4a = 0 \quad (A)\right.$$

Парабола касается прямой, когда функции имеют одну общую точку и $D = 0$ (т.к в другом случае графики могут пересекаться, а не касаться)

$(b-2)^2 + 9 \cdot 4a = (b+2)^2 + 4a$

$b^2 - 4b + 4 + 9 \cdot 4a = b^2 + 4b + 4 + 4a$

$8 \cdot 4a = 8b$

$4a = b \quad (B)$

Подставим значение "b" в (A).

$(4a+2)^2 + 4a = 16a^2 + 16a + 4 + 4a = 16a^2 + 20a + 4 = 0$

Поделим части уравнения на 4

$4a^2 + 5a + 1 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 3^2$

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}$

$a_1 = -1 \qquad a_2 = -\frac{1}{4}$

Подставим значение "a" в (B)

$4 \cdot (-1) = b \qquad 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = b$

$b = -4 \qquad b = -1$

Ответ: $a = -1$, $b = -4$ или $a = -\frac{1}{4}$, $b = -1$

– 8б.

3 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) = \cos 2x - \cos\frac{\pi}{8}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) = -2\sin\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\sin\frac{2x+\frac{\pi}{8}}{2}$

шифр!

Разность косинусов

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right) = -2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)$

$\underline{2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)}\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right) + \underline{2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right) = 0$

Представим $\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$ как синус двойного угла.

$\sin 2a = 2\sin a\cos a.$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\right) = 0$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right) = 0$

$x-\frac{\pi}{16} = \pi k,\ k\in Z$

$x = \pi k + \frac{\pi}{16},\ k\in Z$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right) = 0$

формула приведения для $\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{16}\right) =$

$= \cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{16}-x\right) = 0$

сумма косинусов

$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$2\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}-x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}-\frac{7\pi}{16}+x}{2}$

$2\cos\frac{3\pi}{16}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad 2\cos\frac{3\pi}{16} \neq 0$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

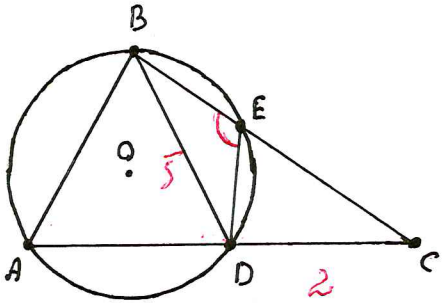
$x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$x = \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

10

Ответ: $\frac{\pi}{16}+\pi k;\ k\in Z;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

4.



Дано: $\triangle ABC$, окр $(O;R_1)$, $R_1=4$, окр $(O;R_1)\cap BC = E$, окр $(O;R_1)\cap AC = D$, $CD=2$, $BD=5$

Найти R описанной окр около $\triangle EDC$

Решение: окр $(O;R_1)$ описана около $\triangle BED$

По теореме синусов $\frac{BD}{\sin\angle BED} = 2R_1$

$\sin\angle BED = \frac{BD}{2R_1} = \frac{5}{4\cdot 2} = \frac{5}{8}$

$\angle BED$ смежен с $\angle DEC$, а значит $\sin\angle BED = \sin\angle DEC = \frac{5}{8}$

В $\triangle DEC$ по теореме синусов $\frac{DC}{\sin\angle DEC} = 2R$.

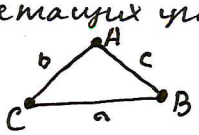
$R = \frac{DC}{2\sin\angle DEC} = \frac{2}{2\cdot\frac{5}{8}} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$

10

теорема синусов:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



Ответ: 1,6.

5. $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 & (A) \\ x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0 & (B) \end{cases}$

Шифр!

(A) $x^3-ax^2-3x^2+3ax+2x-2a \geq 0$

$x^3-2x^2-x^2+2x-ax^2+2ax+ax-2a \geq 0$

$x^2(x-1)-2x(x-1)-ax(x-1)+2a(x-1) \geq 0$

$(x-1)(x^2-2x-ax+2a) \geq 0$

$(x-1)(x(x-a)-2(x-a)) \geq 0$

$(x-1)(x-a)(x-2) \geq 0$

$x=1 \quad x=a \quad x=2$

(B) $x^3-ax^2-3x^2+3ax \leq 0$

$x^2(x-a)-3x(x-a) \leq 0$

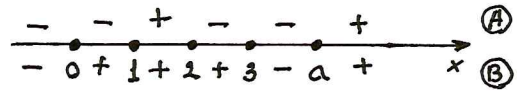
$x(x-3)(x-a) \leq 0$

$x=0 \quad x=a \quad x=3$

-15б.

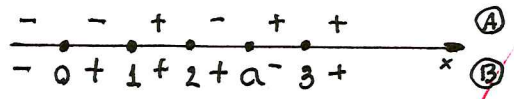
"a" может принимать различные значения, поэтому есть 5 вариан.

1. $a \geq 3$



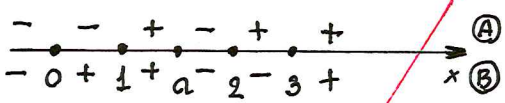
Нет ни одного случая, когда (A) ≥ 0, а (B) ≤ 0, но при $x=a$ оба неравенства обр. в ноль.

2. $2 \leq a < 3$



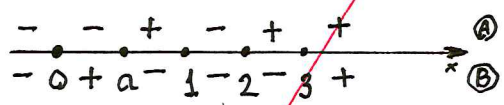
Решения находятся на $[2;a]$, но их больше 1.

3. $1 \leq a < 2$



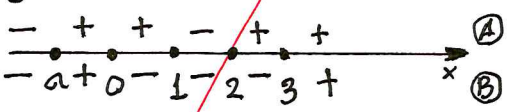
Решения находятся на $[2;3]$, но их больше 1

4. $0 \leq a < 1$



Решения находятся на $[a;1]$; $[2;3]$, но их более 1

5. $a < 0$



Решения на $[0;1]$; $[2;3]$, но их более 1.

Из этого следует, что $a \in [3;+\infty)$

Ответ: $a \in [3;+\infty)$

15б